Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Primeiro Semestre de 2018

# Mecânica Quântica

08/03/2018 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

## Questão 1: Equação de Schrödinger

A função de onda de uma partícula de massa $m$ em um potencial unidimensional $V(x)$ é dada por

$$\psi(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ Axe^{-Bx}e^{iCt/\hbar}, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

onde $A$, $B$ e $C$ são constantes positivas.

**(a) (20%)** A partícula acima está em um estado ligado? Justifique sua resposta.

**(b) (50%)** Use a equação de Schrödinger para encontrar uma expressão para o potencial $V(x)$. Determine os possíveis autovalores de energia da partícula neste potencial. (Sugestão: Compare sua equação com a equação radial para o átomo de hidrogênio.)

**(c) (30%)** Em particular, para o estado fornecido acima, qual é a densidade de probabilidade $\rho(E)$ de se encontrar a partícula com energia entre $E$ e $E + dE$?

Dados:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]u = Eu;$$

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right]\frac{1}{n^2};$$

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2};$$

$$u_{n\ell} = r\sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-\ell-1)!}{2n\left[(n+\ell)!\right]^3}}e^{-r/na}\left(\frac{2r}{na}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na}\right);$$

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = \frac{u_{n\ell}(r)}{r}Y_\ell^m(\theta,\phi);$$

$$L_0^0 = 1; \qquad L_0^1 = 1; \qquad L_0^2 = 2;$$

$$L_1^1 = -2x + 4; \qquad L_2^1 = 3x^2 - 18x + 18;$$

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}; \qquad Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta; \qquad Y_1^{\pm1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\text{sen}\theta e^{\pm i\phi}.$$

## Questão 2: Momento Angular

Um sistema com momento angular $\mathbf{J}_1$ é descrito pelo hamiltoniano

$$H = \alpha \left( J_{1x}^2 + J_{1y}^2 \right) + \beta J_{1z}^2,$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes positivas, com $\beta > \alpha$.

**(a) (25%)** Quais são os possíveis autovalores de energia do sistema?

**(b) (25%)** Quais são os valores médios de $J_{1x}$, $J_{1y}$ e $J_{1z}$ no autoestado com maior energia?

**(c) (25%)** Suponha que no instante inicial $t = 0$, o sistema está preparado em um autoestado simultâneo de $J_1^2$ e $J_{1z}$ com números quânticos $j_1 = 1$ e $m_1 = 0$. Qual a probabilidade de que uma medida de $J_{1z}$ resulte no valor $\hbar$ em um instante posterior?

**(d) (25%)** Dois sistemas como o descrito acima são postos a interagir, de modo que o hamiltoniano do conjunto é

$$H = \alpha \left( J_{1x}^2 + J_{1y}^2 \right) + \beta J_{1z}^2 + \alpha \left( J_{2x}^2 + J_{2y}^2 \right) + \beta J_{2z}^2 + \gamma \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2,$$

onde $\gamma$ é uma constante positiva. Suponha agora que $j_1 = j_2 = 1/2$. Quais são os possíveis autovalores de energia e respectivas degenerescências desse novo sistema?

Dados:

$$J_\pm \left| j, m \right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hbar \left| j, m \pm 1 \right\rangle.$$

## Questão 3: Fundamentos e Teoria de Perturbação

Considere um pêndulo simples com massa $m$ e comprimento $\ell$, podendo oscilar em um plano vertical em um campo gravitacional constante de magnitude $g$. Seja $\theta$ o desvio angular em relação à posição de equilíbrio estável.

**(a) (20%)** Para pequenas oscilações, escreva a *função* hamiltoniana clássica $\mathcal{H}(p_\theta, \theta)$ do pêndulo. A que grandeza física corresponde o momento generalizado $p_\theta$?

**(b) (20%)** A quantização da *função* hamiltoniana do item anterior nos leva a um *operador* hamiltoniano $H(P_\theta, \Theta)$, onde $P_\theta$ e $\Theta$ são operadores hermitianos correspondentes às variáveis clássicas $p_\theta$ e $\theta$, respectivamente. Mostre que

$$H = \frac{P_\theta^2}{2I} + \frac{1}{2} I \omega^2 \Theta^2,$$

indicando os valores de $I$ e $\omega$ em termos dos parâmetros do problema.

**(c) (20%)**Seja $\Theta |\theta\rangle = \theta |\theta\rangle$ a equação que define o problema de autovalor do operador $\Theta$. Determine os elementos de matriz $\langle\theta| \Theta |\theta'\rangle$ e $\langle\theta| P_\theta |\theta'\rangle$ e escreva $H$ na base de autovetores de $\Theta$. Quais são os possíveis autovalores de energia desse pêndulo quantizado?
(*Sugestão*: Não precisa fazer cálculo. Use analogia com um problema conhecido.)

**(d) (40%)** Usando teoria de perturbação de primeira ordem, encontre a correção para a energia do estado fundamental do pêndulo simples quantizado, quando a próxima ordem na expansão da energia potencial em potências de $\theta$ é mantida.

Dados:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - U; \qquad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}};$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p) = \Sigma p\dot{q} - \mathcal{L};$$

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar};$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{2a^{(n+1)/2}};$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

## Questão 4: Teoria de Espalhamento

**(a) (20%)** Suponha que uma partícula está inicialmente no interior de um poço finito, em um estado com amplitude $c(t=0) = c_0$ com energia $E_0$. Para descrever a evolução temporal da partícula no poço, um colega seu propõe a amplitude

$$c(t) = c_0 e^{-i\left(E_0 - i\frac{\Gamma}{2}\right)t/\hbar},$$

onde $\Gamma$ é uma constante positiva. Você considera esta proposta razoável? Justifique.

**(b) (30%)** Independentemente de sua resposta no item (a), calcule a transformada de Fourier $\phi(\omega)$ de $c(t)$. Considere $c = 0$ se $t < 0$.

**(c) (20%)** Seu colega argumenta que a seção de choque $\sigma(\omega)$ do sistema acima é proporcional a $|\phi(\omega)|^2$. Neste caso, esboce o gráfico de $\sigma(\omega)$ identificando claramente o significado do parâmetro $\Gamma$ no seu esboço.

**(d) (30%)** Em problemas como o descrito acima, se o nível $E_0$ domina a seção de choque da $\ell$-ésima onda parcial, vale a fórmula de Breit-Wigner

$$\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2\ell+1)D^2}{(E-E_0)^2 + D^2},$$

onde

$$D = -\left[\left(\frac{d}{dE}(\cot\delta_\ell)\right)\Big|_{E=E_0}\right]^{-1},$$

e $\delta_\ell$ é o deslocamento de fase. Explique como seria possível conciliar a proposta de seu colega no item (a) com a fórmula de Breit-Wigner.

Dados:

$$H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle\,;$$
$$|\psi, t_0 = 0; t\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle\,;$$
$$i\hbar \frac{dc_n}{dt} = \sum_m V_{nm} e^{i\omega_{nm} t} c_m(t);$$
$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(t) e^{i\omega t} dt;$$
$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$